TITLE:

Diffeomorphism とTopological Entropy (電気回路の力学系)

AUTHOR(S):

松江, 広文

CITATION:

松江, 広文. Diffeomorphism とTopological Entropy (電気回路の力学系). 数理解析研究所講究録 1975, 254: 153-162

ISSUE DATE:

1975-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/105737

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
254巻 1975年 153-162

Diffeomorphism と Topological entropy

中央大 理工　松江 広文

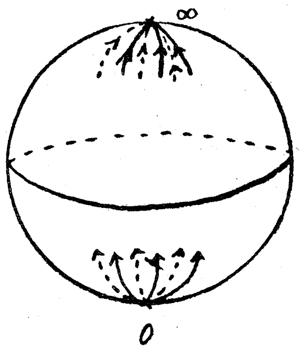
§1で、Axiom A を満たす diffeomorphism の例をあげ次に§2で、topological entropy の定義といくつかの定理を述べる。最後に§3で、§1であげた例の topological entropy の計算をする。

§1. Axiom A を満たす diffeomorphism の例

Morse-Smale diffeo.

例1. S^2 上の例.

S^2 を Riemann sphere とみなし、$f(z)=2z$ により、S^2 上の diffeo. を定義する。



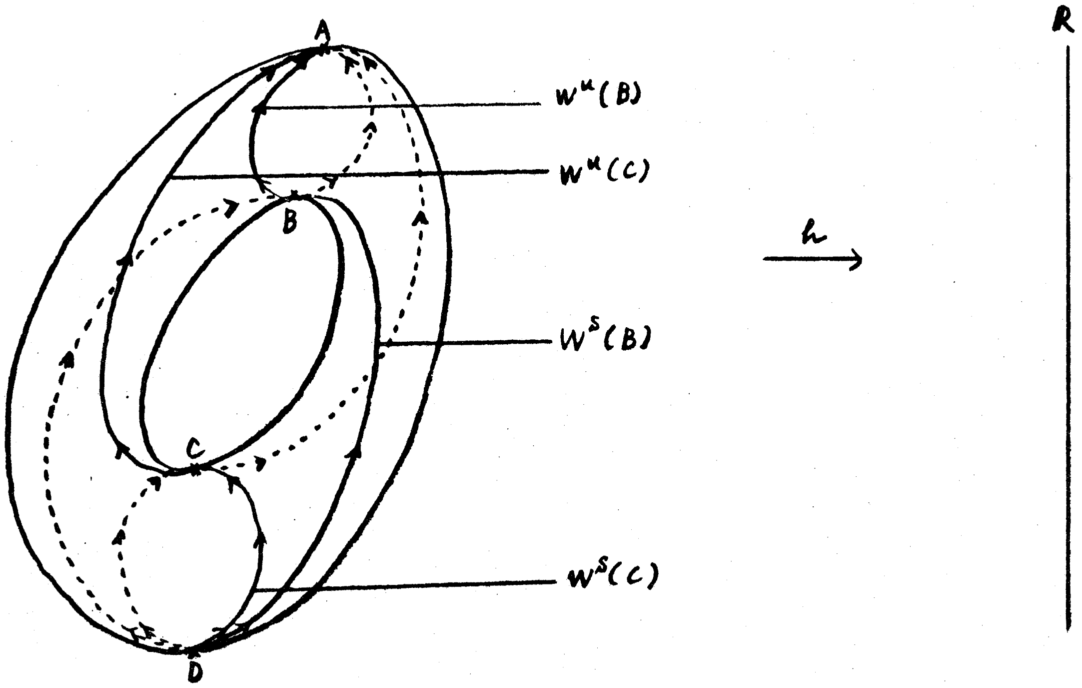
0: source, $W^u(0)=S^2-\{\infty\}$

$W^s(0)=\{0\}$

∞: sink, $W^u(\infty)=\{\infty\}$

$W^s(\infty)=S^2-\{0\}$

例2. T^2 上の例.



height function h に対し, vector field $X = \mathrm{grad}\, h$ を考え. X による flow の time-one map をとる。

以上の例は, gradient-like diffeomorphism。次に, non-gradient-like な例を上げる。

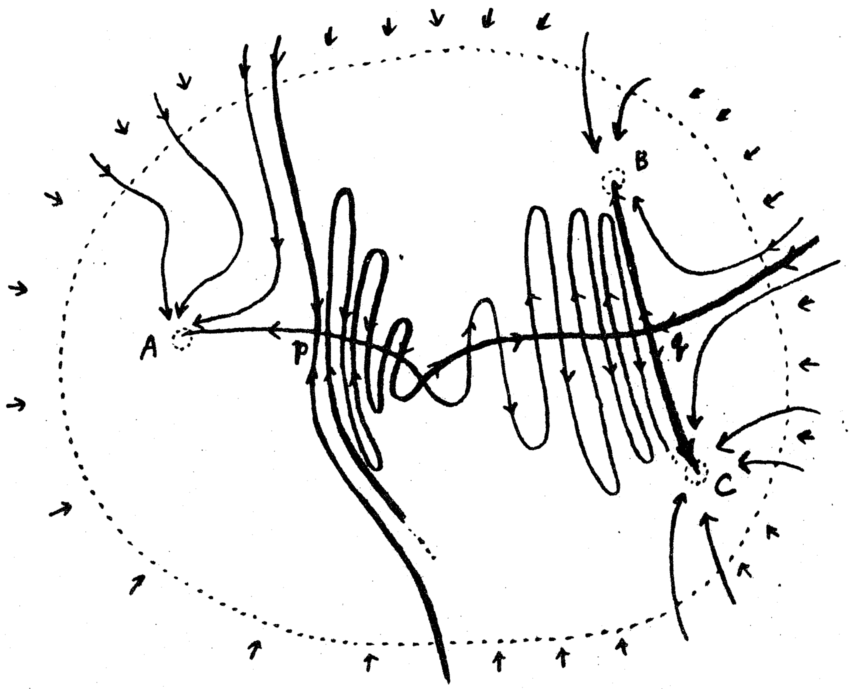
例3.

$$f: \text{grad-like} \iff (p \leq q \Rightarrow \dim W^s(p) \geq \dim W^s(q))$$

ただし, $\boxed{\begin{array}{l} p, q \ \text{periodic pt.} \\ p \leq q \overset{\text{def}}{\iff} W^u(q) \cap W^s(p) \neq \phi \end{array}}$

ということが知られている。

下図はS^2上の diffeo. である。ここでは $p \geq q$ にもかかわらず. $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$ となっていて, しかも non-gradient-like.

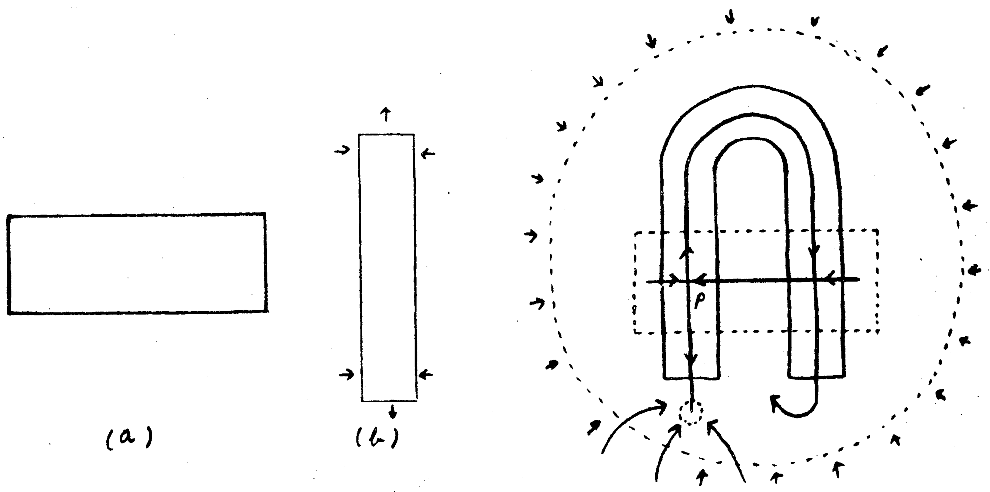


なお. $W^u(p) \pitchfork W^s(q) \ni x$ なる x を. heteroclinic pt. という。

以上の例 (Morse-Smale) の top. ent. $= 0$ であることを§2で述べる。

Horseshoe diffeo. (S^2上の diffeo.)

次の図で horseshoe diffeo. の作り方を表わす。詳しくは倉田氏を参照されたい。この diffeo. においては. homoclinic pt. があらわれる。



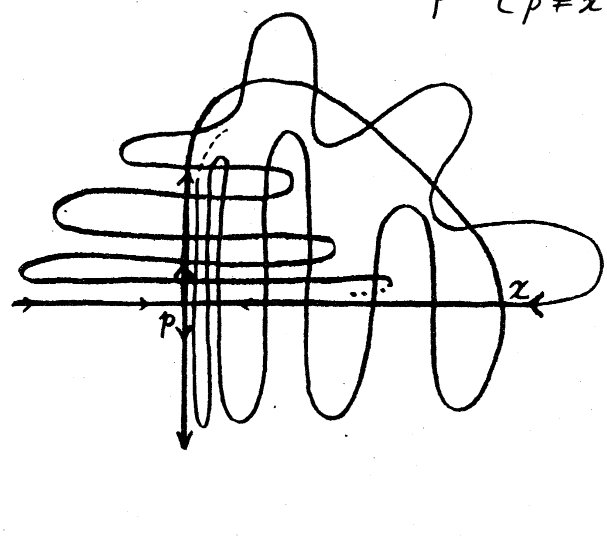
(a) (b) (c) horseshoe

<u>Def.</u> p を $f \in \mathrm{Diff}(M)$ の hyperbolic periodic pt. とする.
$x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ を. homoclinic pt. と云う.
$x \in W^s(p) \pitchfork W^u(p)$ のとき, x は <u>transverse</u> homoclinic pt. という。

<u>Remark</u>. x: homoclinic $\Longleftrightarrow$ ある $m \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\lim_{n\to+\infty} f^{mn}(x) = \lim_{n\to-\infty} f^{mn}(x) = p \quad (p \neq x)$$

上図より, 点 p における stable mfd. と. unstable mfd. は右図の様になる。従って, homoclinic pt. x があらわれる。horseshoe diffeo. の top. ent. $= \log 2$ であ



ることを §3 で示す.

Anosov diffeo. の例.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$. Aの固有値を λ_1, λ_2 とし,

$|\lambda_i| \neq 1$ $(i=1,2)$ とする. $(0<|\lambda_2|<1<|\lambda_1|)$

$$f: \begin{array}{ccc} T^2 & \longrightarrow & T^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x,y) & \longmapsto & (ax+by,\ cx+dy) \end{array}$$

により T^2 上の diffeo. を定義する. f は Anosov diffeo. で, f の top. ent. $=\log|\lambda_1|$ (§3 で示す).

§2. Topological entropy の定義と定理.

$$\begin{cases} X: \text{compact top. space} \\ {}^\forall \text{open cover } \mathcal{A} \text{ of } X,\ N(\mathcal{A}): \text{min subcover の sets の個数} \\ {}^\forall \text{covers } \mathcal{A},\mathcal{B},\ \mathcal{A}\vee\mathcal{B}=\{A\cap B \mid A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}\} \\ \varphi: X\to X \text{ cont. map} \end{cases}$$

Def. $h(\varphi,\mathcal{A})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(\mathcal{A}\vee\varphi^{-1}\mathcal{A}\vee\cdots\vee\varphi^{-n+1}\mathcal{A})$

を. cover $\mathcal{A}$ に関する φ の entropy という.

Remark. $h(\varphi,\mathcal{A})$ は極限値を持ち,

$$0\leq h(\varphi,\mathcal{A})\leq \log N(\mathcal{A})<\infty$$

であることが示される.

Def. $\mathrm{ent}(\varphi)\overset{\mathrm{def}}{=}\sup_{\mathcal{A}} h(\varphi,\mathcal{A})$ を φ の topological entropy

という。

<u>Remark</u>. $\begin{bmatrix} \varphi : X \longrightarrow X & \text{cont. map} \\ \psi : X \rightarrow X' & \text{homeo.} \\ \psi\varphi\psi^{-1} : X' \longrightarrow X' & \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{ent}(\psi\varphi\psi^{-1}) = \mathrm{ent}(\varphi)$, i.e. top. conjugate でtopological entropyは不変.

以上は[4]による。

<u>Theorem</u>. (Bowen [3])

$\begin{bmatrix} M : \text{compact metric sp.} \\ f : M \longrightarrow M \quad \text{cont. map} \\ \Omega : \text{nonwandering set of } f \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(f|_{\Omega})$.

<u>Cor</u>. $\Omega(f)$: finite $\Longrightarrow$ $\mathrm{ent}(f) = 0$.

これより. Morse-Smale diffeo. の topological entropy $= 0$ である。

<u>Notation</u>. (X, d) compact metric sp., $f : X \longrightarrow X$ homeo.

$\delta > 0$ と $x \in X$ に対し、

$$W^s(x, \delta) = \{ y \in X ; d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, \ \forall n \geq 0 \},$$

$$W^u(x, \delta) = \{ y \in X ; d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, \ \forall n \leq 0 \}.$$

<u>Def</u>. f が canonical coordinates を持つとは、

$\forall \delta > 0$ に対し、$\exists \varepsilon(\delta) > 0$ s.t. $d(x, y) \leq \varepsilon(\delta) \Longrightarrow W^s(x, \delta) \cap$

$W^u(y,\delta) \neq \phi$.

f が hyperbolic can. coord. を持つとは，更に次の条件を満たすこととする： $\exists \delta^* > 0$, $0 < \exists \lambda < 1$, $\exists c \geq 1$;

$x \in X$, $y \in W^s(x,\delta^*) \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) \leq c\lambda^n d(x,y)$, $\forall n \geq 0$,

$x \in X$, $y \in W^u(x,\delta^*) \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) \leq c\lambda^n d(x,y)$, $\forall n \leq 0$.

Remark. can. coord. については metric のとり方によらないが，hyperbolic can. coord. については metric のとり方に依存する。

Theorem. (Bowen [3])

$$\left[\begin{array}{l} M : \text{compact Riemannian mfd.} \\ f \in \mathrm{Diff}\, M \text{ が Axiom A を満たす} \\ \Omega_i : \text{basic set} \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow f|_{\Omega_i}$ はある metric に関し，hyp. can. coord. を持つ。

Theorem. (Bowen [3])

$$\left[\begin{array}{l} X : \text{compact metric sp.} \\ f : X \to X \text{ homeo. で，hyp. can. coord. を持つ.} \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow \mathrm{ent}(f) = \overline{\lim} \frac{1}{n} \log N_n(f)$,

ただし，$N_n(f)$: f^n の fixed pts. の個数。

§3. Shift automorphism と topological entropy の計算.

$S_n = \{0, 1, \ldots, n-1\} \ni a, b$ に対し

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & a=b \\ 1 & a \neq b \end{cases}$$ とおく.

$X_{S_n} = \{(\cdots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots);\ a_i \in S_n\}$,

$x \in X_{S_n}$ に対し, 第 i 座標を $(x)_i$ と書く. $(x)_i \in S_n$.

$x, y \in X_{S_n}$ に対し, $d(x,y) \overset{def}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} d((x)_i, (y)_i)$ による metric を入れると, X_{S_n} は compact metric sp. となる.

$\alpha : X_{S_n} \longrightarrow X_{S_n}$ を, $a = (\cdots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots) \in X_{S_n}$ に対し, $(\alpha(a))_i = a_{i+1}$ により定義する。α は onto homeo.(shift automorphism という).

例. $(n=2)$

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{cccccccccc} & & \scriptstyle i-2 & \scriptstyle i-1 & \scriptstyle i & \scriptstyle i+1 & & & & \end{array} \\ a = & (\cdots\cdots, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots\cdots) \\ \downarrow\alpha & \qquad\qquad \swarrow\ \swarrow\ \swarrow\ \swarrow \\ \alpha(a) = & (\cdots, \underset{i-3}{1}, \underset{i-2}{0}, \underset{i-1}{0}, \underset{i}{1}, 0, 1, 0, \cdots\ ) \end{array}$$

$\alpha : X_{S_n} \longrightarrow X_{S_n}$ に対し, α^m の fixed pt. は,

$$(\cdots, \underbrace{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}}, \underbrace{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}}, \underbrace{a_{i_1}, \cdots, a_{i_m}}, \cdots)$$

である. よって, α^m の fixed pts. の個数は n^m. 従って,

$$\begin{aligned} \mathrm{ent}(\alpha) &= \overline{\lim_m} \frac{1}{m} \log N_m(\alpha) \\ &= \overline{\lim_m} \frac{1}{m} \log n^m = \log n . \end{aligned}$$

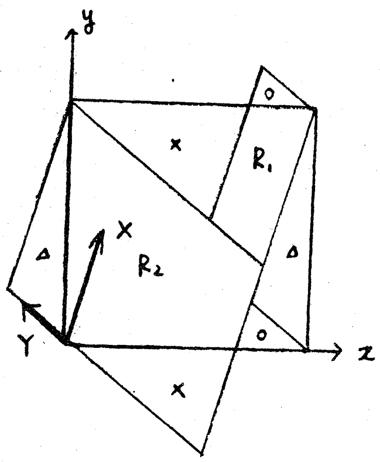
<u>horseshoe diffeo</u>. $f : S^2 \longrightarrow S^2$ の nonwandering set を Λ とする. Λ は Cantor set で, $f|_\Lambda$ は shift aut. $\alpha : X_{S_2} \longrightarrow$

X_{S_2} に top. conjugate，従って．$ent(f) = \log 2$．

<u>toral diffeo. (Anosov) の場合．</u>

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ の固有値を λ_1, λ_2 ($0 < |\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$) とし、§1 の様に $f_A : T^2 \longrightarrow T^2$ を考える。f_A^m の fixed pts. の個数 $N_m(f_A)$ は Lefschetz trace formula より．$N_m(f_A) = (1-\lambda_1^m)(1-\lambda_2^m)$．

$$
\begin{aligned}
ent(f_A) &= \overline{\lim}\, \frac{1}{m} \log N_m(f_A) \\
&= \overline{\lim}\, \frac{1}{m} \log |\lambda_1|^m \left(\frac{1}{|\lambda_1|^m} - \frac{\lambda_1^m}{|\lambda_1|^m} \right) (1-\lambda_2^m) \\
&= \log |\lambda_1| .
\end{aligned}
$$



λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトルを X と Y とし、二つの平行四辺形 R_1 と R_2 に分割する。上の計算は、この Markov partition を用いて shift auto. と対応させても、又、定義からも直接導ける。

文献

[1] Smale, S. ; Differentiable Dynamical Systems. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), p. 747–817.

[2] Nitecki, Z. ; Differentiable Dynamics. (MIT)

[3] Bowen, R. ; Topological Entropy and Axiom A. Proc. Sympos. Pure Math. 14 (1970), p. 23–41.

[4] Adler, R. L., A. G. Konheim and M. H. McAndrew ; Topological Entropy. Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965). p. 309–319.

[5] Smale, S. ; Diffeomorphism with many periodic points. Differential and Combinatorial Topology. (Princeton) p. 63–80.